

Title	或ル不等式ニ就テ
Author(s)	野村, 武衛
Citation	全国紙上数学談話会. 77 p.25-p.28
Issue Date	1936-02-07
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74265
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

342. 或ル不等式 = 就テ

野村 武 衛 (東京高師)

Journal London Math. Soc. 10 (1935) 242
= H. C. Pocklington が 次のニツノ不等式ヲ証明シテ

キル。

コレカラ出テ來ル文字 a, k, p, x_i, y_i 等ハ悉ク正
数ニシテ且ツ

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n, \quad y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$$

トスル。

[定理1]

$$(1) \quad \sum_1^n x_r y_r \geq a^p \quad \sum_1^n x_r \leq ka$$

ナレバ、 $S \geq k$ ナル正整数 $S =$ 對シテ少クトモ

$$(2) \quad X_S = \sum_1^S x_r \geq a$$

$$(3) \quad Y_S = \sum_1^S y_r \geq a^{p-1}$$

ノ何レカ一方が成立スル。

[定理2] $p \geq 2$ ナルトキ

$$(4) \quad \sum_1^n x_r^p \geq a^p \quad \sum_1^n x_r \leq ka$$

ナレバ、 $S \geq k$ ナル正整数 $S =$ 對シテハ

$$(5) \quad \sum_1^S x_r \geq a$$

Pocklington ノ方法ヲ殆ンドソノマコブ之レ等ノ定
理ヲ少シ拡張スルコトが出来ル。定理1ノ a^{p-1} ノ代リニ b
ヲ用ヒテ

[定理3]

$$(1') \quad \sum_1^n x_r y_r \geq ab \quad \sum_1^n x_r \leq ka$$

ナレバ, $S \geq k$ ナル正整数 S = 對シテ少クトモ

$$(2') \quad X_S = \sum_1^S x_r \geq a$$

$$(3') \quad Y_S = \sum_1^S y_r \geq b$$

ノ何レカ一方が成立スル。

(証明)

$$\begin{aligned} ab \leq x_1 y_1 + \dots + x_n y_n &\leq y_1 X_S + y_S (X_n - X_S) \\ &\leq y_1 X_S + y_S (ka - X_S) \end{aligned}$$

$$\therefore ab \leq (y_1 - y_S) X_S + ka y_S$$

$$\begin{aligned} \therefore (y_1 - y_S)(X_S - a) &\geq ab - ka y_S - a(y_1 - y_S) \\ &= a\{b - y_1 - (k-1)y_S\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (y_1 - y_S)(X_S - a) &\geq a\{b - y_1 - (S-1)y_S\} \\ &\geq a\{b - y_1 - y_2 - \dots - y_S\} = a(b - Y_S) \end{aligned}$$

コトデ (2)', (3)' ノ何レモ成立セヌトスルト負数が正数ヨリ大
トナリ不合理ナル。故ニ (2)', (3)' ノ少クトモ一方ハ成立シ
ナケレバナラヌ。

[定理4] $x > 0$ ナルトキ $\varphi(x) \frac{\varphi(x)}{x}$ ハ共ニ單調増加
デ, $\varphi(x)$ ハ正デ連続トスル。

$$(4') \quad \sum_1^n x_r \varphi(x_r) \geq a \varphi(a), \quad \sum_1^n x_r \leq ka$$

ナレバ, $S \geq k$ ナル正整数 S = 對シテハ

$$(5') \quad \sum_1^S x_r \geq a$$

(証明) $\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2) \geq \dots \geq \varphi(x_n)$ デアルカラ定

理3 = ヨツテ

$$\sum_1^s x_r \geq a \quad \text{又ハ} \quad \sum_1^s \varphi(x_r) \geq \varphi(a)$$

ノ何レカ一方が成立スルト云フコト = ナル。Cooperノ不
等式 = ヨレバ

$$\varphi^{-1}\{\varphi(x_1) + \dots + \varphi(x_s)\} \leq x_1 + \dots + x_s$$

トナルカラ $\varphi(a) \leq \sum_1^s \varphi(x_r)$ ナレバ

$$\varphi^{-1}\{\varphi(a)\} = a \leq x_1 + \dots + x_s$$

故 = 何レ = ヲツテモ

$$a \leq \sum_1^s x_r \quad (\text{証明終})$$

コノ定理デ $\varphi(x) = x^p$, $p \geq 1$ トスレバ定理2が得ラレル。